

Representación de números fraccionarios: Punto Flotante

Organización de computadoras

Universidad Nacional de Quilmes

20 de octubre de 2014

Repaso

- ① Punto Fijo
 - ① Motivación
 - ② Interpretación
 - ③ Rango
 - ④ Resolución
 - ⑤ Representación
 - ⑥ Errores

Punto Fijo: Interpretar

Interpretación en $BSS(n, m)$: dos mecanismos

Punto Fijo: Interpretar

Interpretación en $BSS(n, m)$: dos mecanismos

(A)

Sumar considerando los
pesos fraccionarios

(B)

Interpretar el número
como en $BSS()$ y dividir
por 2^m

Punto Fijo: Interpretar

Interpretación en $BSS(n, m)$: dos mecanismos

(A)

Sumar considerando los
pesos fraccionarios

(B)

Interpretar el número
como en $BSS()$ y dividir
por 2^m

$$\mathcal{I}_{bss(5,2)}(00101) = 2^0 + 2^{-2} \\ = 1.25$$

Punto Fijo: Interpretar

Interpretación en $BSS(n, m)$: dos mecanismos

(A)

Sumar considerando los
pesos fraccionarios

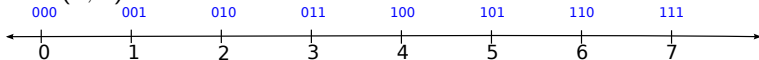
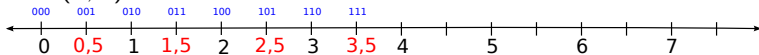
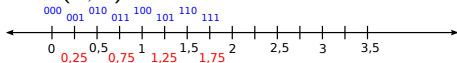
$$\begin{aligned}\mathcal{I}_{bss(5,2)}(00101) &= 2^0 + 2^{-2} \\ &= 1.25\end{aligned}$$

(B)

Interpretar el número
como en $BSS()$ y dividir
por 2^m


$$\begin{aligned}\mathcal{I}_{bss(5,2)}(00101) &= \frac{\mathcal{I}_{bss(5)}(00101)}{4} \\ &= \frac{5}{4} = 1.25\end{aligned}$$


Punto Fijo: Rango y Resolución

 $BSS(3, 0)$  $BSS(3, 1)$  $BSS(3, 2)$ 

Punto Fijo: Representar

(Separando partes)

La parte Entera:  como en $BSS(n - m)$.

La parte Fraccionaria:  con el método de las multiplicaciones sucesivas

(Corriendo la coma)

Correr el punto fraccionario para poder utilizar la representación en $BSS(n)$

¿Porqué otro sistema nuevo?

¿Porqué otro sistema nuevo?

¿Cómo representar un rango amplio?

¿Porqué otro sistema nuevo?

¿Cómo representar un rango amplio?



Usando mas bits

¿Porqué otro sistema nuevo?

¿Cómo tener mejor precisión?

¿Porqué otro sistema nuevo?

¿Cómo tener mejor precisión?



Usando bits fraccionarios

¿Porqué otro sistema nuevo?

Objetivo: Mas rango y menor resolución

¿Porqué otro sistema nuevo?

Objetivo: Mas rango y menor resolución



Relación de compromiso



Relación de compromiso

Con el enfoque de punto fijo:

- 1 El error absoluto es el mismo en todo el rango. No es bueno tener el mismo "ajuste" en todo el rango
- 2 Tampoco pueden representarse fracciones muy pequeñas. El error relativo es muy importante en los valores pequeños

Punto Flotante

La notación científica

La notación científica (35×10^9)

Una que conocemos todos: Notación científica

permite representar de manera compacta números muy grandes y muy pequeños

Una que conocemos todos: Notación científica

permite representar de manera compacta números muy grandes y muy pequeños

Ejemplo

$$87,000,000,000,000,000,000 = 0,87 \times 10^{23}$$

$$0,0000000000000087 = 0,87 \times 10^{-14}$$

Una que conocemos todos: Notación científica

permite representar de manera compacta números muy grandes y muy pequeños

Ejemplo

$$87,000,000,000,000,000,000,000 = 0,87 \times 10^{23}$$

$$0,00000000000000087 = 0,87 \times 10^{-14}$$

- deslizar en forma dinámica el punto decimal a una posición conveniente
- usar el exponente del 10 para tener registro de donde estaba la coma originalmente

Sistemas de Punto Flotante

- Codificación de números mediante **Mantisa** y **Exponente**.

$$0,87 \times 10^{-14}$$

Sistemas de Punto Flotante

- Codificación de números mediante **Mantisa** y **Exponente**.

$$0,87 \times 10^{-14}$$

Sistemas de Punto Flotante

- Codificación de números mediante **Mantisa** y **Exponente**.

$$0,87 \times 10^{-14}$$

Sistemas de Punto Flotante

- Codificación de números mediante **Mantisa** y **Exponente**.

$$0,87 \times 10^{-14}$$

- Los números se escriben como:

$$N = M * B^E$$

Donde N es el número que se quiere representar, M y E son la Mantisa y el Exponente respectivamente, y B la base del sistema.

Sistemas de Punto Flotante

De esta forma, representaremos los números con dos partes:

- Mantisa
- Exponente

Sistemas de Punto Flotante

De esta forma, representaremos los números con dos partes:

- Mantisa
- Exponente

Ejemplo:

$$N = 5 * 2^{-1} = 2,5$$

La base del sistema será fija (2) y por eso no será necesario representarla, quedando implícita.

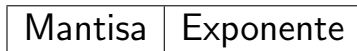
Las partes de Mantisa y Exponente utilizarán sistemas ya vistos anteriormente.

Formato

Las dos partes pueden organizarse:

Formato

Las dos partes pueden organizarse:

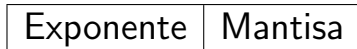


Formato

Las dos partes pueden organizarse:



ó bien:



Interpretación en Punto Flotante

Punto Flotante: Interpretación

- 1 Interpretar la mantisa para obtener el número **M**

Punto Flotante: Interpretación

- 1 Interpretar la mantisa para obtener el número **M**
- 2 Interpretar el exponente para obtener el número **e**

Punto Flotante: Interpretación

- 1 Interpretar la mantisa para obtener el número **M**
- 2 Interpretar el exponente para obtener el número **e**
- 3 Componer el número $N = M * 2^e$

Punto Flotante: Interpretación

- 1 Interpretar la mantisa para obtener el número **M**
- 2 Interpretar el exponente para obtener el número **e**
- 3 Componer el número $N = M * 2^e$

¿Cómo?

Usando los sistemas de mantisa y exponente por separado

Punto Flotante: Interpretación

Ejemplo

Mantisa $BSS(2)$	Exponente $BSS(2)$
------------------	--------------------

¿Cuánto vale $\mathcal{I}(0110)$?

Punto Flotante: Interpretación

Ejemplo

Mantisa $BSS(2)$	Exponente $BSS(2)$
------------------	--------------------

¿Cuánto vale $\mathcal{I}(0110)$?

Mantisa

Exponente

$$\mathcal{I}_{bss(2)}(01) = 1 = M$$

$$\mathcal{I}_{bss(2)}(10) = 2 = E$$

$$N = M * 2^E = 1 * 2^2 = 4$$

Punto Flotante: Interpretación

Ejemplo

Mantisa $BSS(2)$	Exponente $BSS(2)$
------------------	--------------------

¿Cuánto vale $\mathcal{I}(1111)$?

Punto Flotante: Interpretación

Ejemplo

Mantisa $BSS(2)$	Exponente $BSS(2)$
------------------	--------------------

¿Cuánto vale $\mathcal{I}(1111)$?

Mantisa

Exponente

$$\mathcal{I}_{bss(2)}(11) = 3 = M$$

$$\mathcal{I}_{bss(2)}(11) = 3 = E$$

$$N = M * 2^E = 3 * 2^3 = 24$$

Punto Flotante: Interpretación

Ejemplo

Mantisa $BSS(2)$	Exponente $BSS(2)$
------------------	--------------------

¿Cuánto vale $\mathcal{I}(0001)$?

Punto Flotante: Interpretación

Ejemplo

Mantisa $BSS(2)$	Exponente $BSS(2)$
------------------	--------------------

¿Cuánto vale $\mathcal{I}(0001)$?

Mantisa

Exponente

$$\mathcal{I}_{bss(2)}(00) = 0 = M$$

$$\mathcal{I}_{bss(2)}(01) = 1 = E$$

$$N = M * 2^E = 0 * 2^1 = 0$$

Punto Flotante

Ejemplo

Mantisa en $SM(11)$ y exponente en $CA2(5)$

Mantisa $BSS(10)$	S	Exp $CA2(5)$
-------------------	---	--------------

Punto Flotante

Ejemplo

Mantisa en $SM(11)$ y exponente en $CA2(5)$

Mantisa $BSS(10)$	S	Exp $CA2(5)$
-------------------	---	--------------

¿Cuánto vale la cadena **0001101010**000010?

Punto Flotante

Ejemplo

Mantisa en $SM(11)$ y exponente en $CA2(5)$

Mantisa $BSS(10)$	S	Exp $CA2(5)$
-------------------	---	--------------

¿Cuánto vale la cadena 0001101010000010 ?

- $M = \mathcal{I}_{bss}(0001101010) = 106$
- $S = 0 = \text{positivo}$
- $E = \mathcal{I}_{ca2}(00010) = 2$

$$N = M * B^E = 106 * 2^2 = 424$$

Punto Flotante

Ejemplo

Mantisa en $SM(11)$ y exponente en $CA2(5)$

Mantisa $BSS(10)$	S	Exp $CA2(5)$
-------------------	---	--------------

¿Cuánto vale la cadena 0001101010000010 ?

- $M = \mathcal{I}_{bss}(0001101010) = 106$
- $S = 0 = \text{positivo}$
- $E = \mathcal{I}_{ca2}(00010) = 2$

$$N = M * B^E = 106 * 2^2 = 424$$

¿Que otros números se pueden representar?

Completar la tabla

Cadena	E	M	N
0000	0	0	$0 * 2^0 = 0$
0001	0	1	$1 * 2^0 = 1$
0010	0	2	$2 * 2^0 = 2$
0011	0	3	$3 * 2^0 = 3$

Exponente $BSS(2)$ Mantisa $BSS(2)$

Completar la tabla

Exponente $BSS(2)$	Mantisa $BSS(2)$
--------------------	------------------

Cadena	E	M	N
0000	0	0	$0 * 2^0 = 0$
0001	0	1	$1 * 2^0 = 1$
0010	0	2	$2 * 2^0 = 2$
0011	0	3	$3 * 2^0 = 3$
0100	1	0	$0 * 2^1 = 0$
0101	1	1	$1 * 2^1 = 2$
0110	1	2	$2 * 2^1 = 4$
0111	1	3	$3 * 2^1 = 6$

Completar la tabla

Exponente $BSS(2)$	Mantisa $BSS(2)$
--------------------	------------------

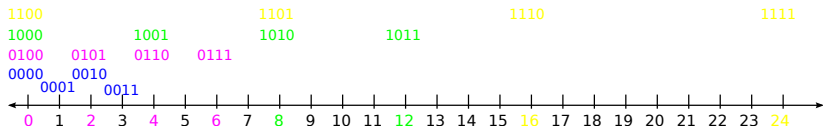
Cadena	E	M	N
0000	0	0	$0 * 2^0 = 0$
0001	0	1	$1 * 2^0 = 1$
0010	0	2	$2 * 2^0 = 2$
0011	0	3	$3 * 2^0 = 3$
0100	1	0	$0 * 2^1 = 0$
0101	1	1	$1 * 2^1 = 2$
0110	1	2	$2 * 2^1 = 4$
0111	1	3	$3 * 2^1 = 6$
1000	2	0	$0 * 2^2 = 0$
1001	2	1	$1 * 2^2 = 4$
1010	2	2	$2 * 2^2 = 8$
1011	2	3	$3 * 2^2 = 12$

Completar la tabla

Exponente $BSS(2)$	Mantisa $BSS(2)$
--------------------	------------------

Cadena	E	M	N
0000	0	0	$0 * 2^0 = 0$
0001	0	1	$1 * 2^0 = 1$
0010	0	2	$2 * 2^0 = 2$
0011	0	3	$3 * 2^0 = 3$
0100	1	0	$0 * 2^1 = 0$
0101	1	1	$1 * 2^1 = 2$
0110	1	2	$2 * 2^1 = 4$
0111	1	3	$3 * 2^1 = 6$
1000	2	0	$0 * 2^2 = 0$
1001	2	1	$1 * 2^2 = 4$
1010	2	2	$2 * 2^2 = 8$
1011	2	3	$3 * 2^2 = 12$
1100	3	0	$0 * 2^3 = 0$
1101	3	1	$1 * 2^3 = 8$
1110	3	2	$2 * 2^3 = 16$
1111	3	3	$3 * 2^3 = 24$

Completar la tabla



- **exponente = 0**
- **exponente = 1**
- **exponente = 2**
- **exponente = 3**

¿Cuántos números pueden representarse?:

$$\#\{0, 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24\} = 10$$

Completar la tabla: mantisa $SM(2)$

Cadena	E	M	N
0000	0	0	$0 * 2^0 = 0$
0001	0	1	$1 * 2^0 = 1$
0010	0	0	$0 * 2^0 = 0$
0011	0	-1	$-1 * 2^0 = -1$

Exponente $BSS(2)$ Mantisa $SM(2)$

Completar la tabla: mantisa $SM(2)$

Exponente $BSS(2)$	Mantisa $SM(2)$
--------------------	-----------------

Cadena	E	M	N
0000	0	0	$0 * 2^0 = 0$
0001	0	1	$1 * 2^0 = 1$
0010	0	0	$0 * 2^0 = 0$
0011	0	-1	$-1 * 2^0 = -1$
0100	1	0	$0 * 2^1 = 0$
0101	1	1	$1 * 2^1 = 2$
0110	1	0	$0 * 2^1 = 0$
0111	1	-1	$-1 * 2^1 = -2$

Completar la tabla: mantisa $SM(2)$

Exponente $BSS(2)$	Mantisa $SM(2)$
--------------------	-----------------

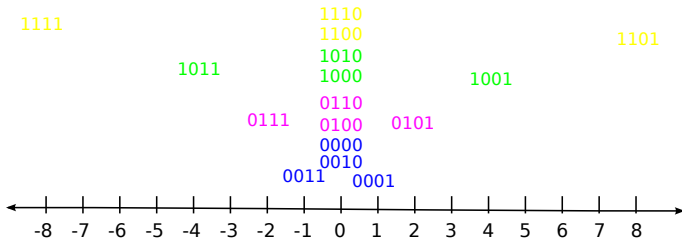
Cadena	E	M	N
0000	0	0	$0 * 2^0 = 0$
0001	0	1	$1 * 2^0 = 1$
0010	0	0	$0 * 2^0 = 0$
0011	0	-1	$-1 * 2^0 = -1$
0100	1	0	$0 * 2^1 = 0$
0101	1	1	$1 * 2^1 = 2$
0110	1	0	$0 * 2^1 = 0$
0111	1	-1	$-1 * 2^1 = -2$
1000	2	0	$0 * 2^2 = 0$
1001	2	1	$1 * 2^2 = 4$
1010	2	0	$0 * 2^2 = 0$
1011	2	-1	$-1 * 2^2 = -4$

Completar la tabla: mantisa $SM(2)$

Exponente $BSS(2)$	Mantisa $SM(2)$
--------------------	-----------------

Cadena	E	M	N
0000	0	0	$0 * 2^0 = 0$
0001	0	1	$1 * 2^0 = 1$
0010	0	0	$0 * 2^0 = 0$
0011	0	-1	$-1 * 2^0 = -1$
0100	1	0	$0 * 2^1 = 0$
0101	1	1	$1 * 2^1 = 2$
0110	1	0	$0 * 2^1 = 0$
0111	1	-1	$-1 * 2^1 = -2$
1000	2	0	$0 * 2^2 = 0$
1001	2	1	$1 * 2^2 = 4$
1010	2	0	$0 * 2^2 = 0$
1011	2	-1	$-1 * 2^2 = -4$
1100	3	0	$0 * 2^3 = 0$
1101	3	1	$1 * 2^3 = 8$
1110	3	0	$0 * 2^3 = 0$
1111	3	-1	$-1 * 2^3 = -8$

Completar la tabla



- **exponente = 0**
- **exponente = 1**
- **exponente = 2**
- **exponente = 3**

¿Cuántos números pueden representarse?:

$\#\{-8, -4, -2, -1, 0, 1, 2, 4, 8\} = 9$

Completar la tabla: exponente $SM(2)$

Cadena	E	M	N
0000	0	0	$0 * 2^0 = 0$
0001	0	1	$1 * 2^0 = 1$
0010	0	2	$2 * 2^0 = 2$
0011	0	3	$3 * 2^0 = 3$

Exponente $SM(2)$	Mantisa $BSS(2)$
-------------------	------------------

Completar la tabla: exponente $SM(2)$

Exponente $SM(2)$	Mantisa $BSS(2)$
-------------------	------------------

Cadena	E	M	N
0000	0	0	$0 * 2^0 = 0$
0001	0	1	$1 * 2^0 = 1$
0010	0	2	$2 * 2^0 = 2$
0011	0	3	$3 * 2^0 = 3$
0100	1	0	$0 * 2^1 = 0$
0101	1	1	$1 * 2^1 = 2$
0110	1	2	$2 * 2^1 = 4$
0111	1	3	$3 * 2^1 = 6$

Completar la tabla: exponente $SM(2)$

Exponente $SM(2)$	Mantisa $BSS(2)$
-------------------	------------------

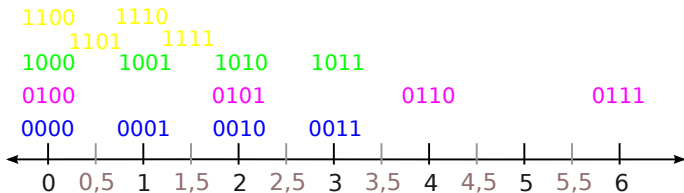
Cadena	E	M	N
0000	0	0	$0 * 2^0 = 0$
0001	0	1	$1 * 2^0 = 1$
0010	0	2	$2 * 2^0 = 2$
0011	0	3	$3 * 2^0 = 3$
0100	1	0	$0 * 2^1 = 0$
0101	1	1	$1 * 2^1 = 2$
0110	1	2	$2 * 2^1 = 4$
0111	1	3	$3 * 2^1 = 6$
1000	0	0	$0 * 2^0 = 0$
1001	0	1	$1 * 2^0 = 1$
1010	0	2	$2 * 2^0 = 2$
1011	0	3	$3 * 2^0 = 3$

Completar la tabla: exponente $SM(2)$

Exponente $SM(2)$	Mantisa $BSS(2)$
-------------------	------------------

Cadena	E	M	N
0000	0	0	$0 * 2^0 = 0$
0001	0	1	$1 * 2^0 = 1$
0010	0	2	$2 * 2^0 = 2$
0011	0	3	$3 * 2^0 = 3$
0100	1	0	$0 * 2^1 = 0$
0101	1	1	$1 * 2^1 = 2$
0110	1	2	$2 * 2^1 = 4$
0111	1	3	$3 * 2^1 = 6$
1000	0	0	$0 * 2^0 = 0$
1001	0	1	$1 * 2^0 = 1$
1010	0	2	$2 * 2^0 = 2$
1011	0	3	$3 * 2^0 = 3$
1100	-1	0	$0 * 2^{-1} = 0$
1101	-1	1	$1 * 2^{-1} = 0,5$
1110	-1	2	$2 * 2^{-1} = 1$
1111	-1	3	$3 * 2^{-1} = 1,5$

Completar la tabla

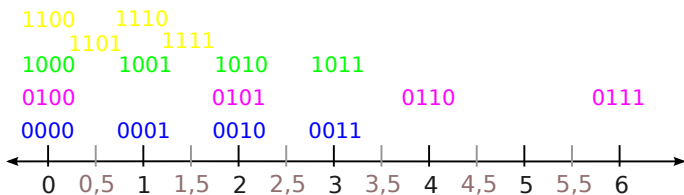


- exponente = 0
- exponente = 1
- exponente = 0
- exponente = -1

¿Cuántos números pueden representarse?:

$$\#\{0, 0,5, 1, 1,5, 2, 3, 4, 6\} = 8$$

Completar la tabla



- exponente = 0
- exponente = 1
- exponente = 0
- exponente = -1

¿Cuántos números pueden representarse?:

$$\#\{0, 0,5, 1, 1,5, 2, 3, 4, 6\} = 8$$

Completar la tabla: Mantisa y exponente $SM(2)$

Cadena	E	M	N
0000	0	0	$0 * 2^0 = 0$
0001	0	1	$1 * 2^0 = 1$
0010	0	0	$0 * 2^0 = 0$
0011	0	-1	$-1 * 2^0 = -1$

Exponente $SM(2)$ Mantisa $SM(2)$

Completar la tabla: Mantisa y exponente $SM(2)$

Exponente $SM(2)$	Mantisa $SM(2)$
-------------------	-----------------

Cadena	E	M	N
0000	0	0	$0 * 2^0 = 0$
0001	0	1	$1 * 2^0 = 1$
0010	0	0	$0 * 2^0 = 0$
0011	0	-1	$-1 * 2^0 = -1$
0100	1	0	$0 * 2^1 = 0$
0101	1	1	$1 * 2^1 = 2$
0110	1	0	$0 * 2^1 = 0$
0111	1	-1	$-1 * 2^1 = -2$

Completar la tabla: Mantisa y exponente $SM(2)$

Exponente $SM(2)$	Mantisa $SM(2)$
-------------------	-----------------

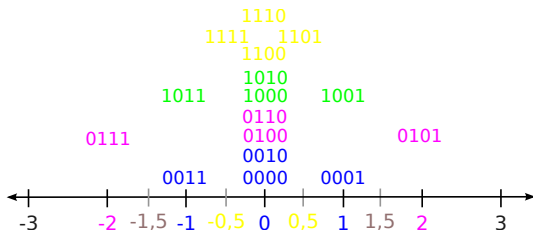
Cadena	E	M	N
0000	0	0	$0 * 2^0 = 0$
0001	0	1	$1 * 2^0 = 1$
0010	0	0	$0 * 2^0 = 0$
0011	0	-1	$-1 * 2^0 = -1$
0100	1	0	$0 * 2^1 = 0$
0101	1	1	$1 * 2^1 = 2$
0110	1	0	$0 * 2^1 = 0$
0111	1	-1	$-1 * 2^1 = -2$
1000	0	0	$0 * 2^0 = 0$
1001	0	1	$1 * 2^0 = 1$
1010	0	0	$0 * 2^0 = 0$
1011	0	-1	$-1 * 2^0 = -1$

Completar la tabla: Mantisa y exponente $SM(2)$

Exponente $SM(2)$	Mantisa $SM(2)$
-------------------	-----------------

Cadena	E	M	N
0000	0	0	$0 * 2^0 = 0$
0001	0	1	$1 * 2^0 = 1$
0010	0	0	$0 * 2^0 = 0$
0011	0	-1	$-1 * 2^0 = -1$
0100	1	0	$0 * 2^1 = 0$
0101	1	1	$1 * 2^1 = 2$
0110	1	0	$0 * 2^1 = 0$
0111	1	-1	$-1 * 2^1 = -2$
1000	0	0	$0 * 2^0 = 0$
1001	0	1	$1 * 2^0 = 1$
1010	0	0	$0 * 2^0 = 0$
1011	0	-1	$-1 * 2^0 = -1$
1100	-1	0	$0 * 2^{-1} = 0$
1101	-1	1	$1 * 2^{-1} = 0,5$
1110	-1	0	$0 * 2^{-1} = 0$
1111	-1	-1	$-1 * 2^{-1} = -0,5$

Completar la tabla



- exponente = 0
- exponente = 1
- exponente = 2
- exponente = -1

¿Cuántos números pueden representarse?:

$$\#\{-2, -1, -0,5, 0, 0,5, 1, 2\} = 7$$

Hablemos del rango

Rango

- M en $SM(11)$
- E en $CA2(5)$

¿Cuál es el número representable mas grande?

Rango

- M en $SM(11)$
- E en $CA2(5)$

¿Cuál es el número representable mas grande?



El número representable más grande será: 1111111111 0 01111

- $M = \mathcal{I}_{bss}(1111111111) = 1023$
- $S = 0 = \text{positivo}$
- $E = \mathcal{I}_{ca2}(01111) = 15$

$$MAX = 1023 * 2^{15} = 33,521,664$$

Rango

- M en $SM(11)$
- E en $CA2(5)$

¿Cuál es el número representable mas chico?

Rango

- M en $SM(11)$
- E en $CA2(5)$

¿Cuál es el número representable mas chico?



- El número representable más chico será similar pero con signo negativo

$$MIN = \mathcal{I}(1111111111101111) = -1023 * 2^{15} = -33,521,664$$

- El número cero podrá representarse con mantisa 0 y cualquier signo o exponente.

¿Cuál es el máximo? ¿Cuál es el mínimo?

Exponente $BSS(2)$	Mantisa $BSS(2)$
--------------------	------------------



¿Cuál es el máximo? ¿Cuál es el mínimo?

Exponente $BSS(2)$	Mantisa $BSS(2)$
--------------------	------------------



Rango: [0,24]

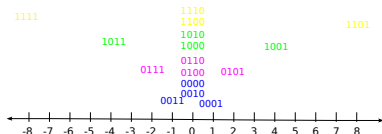
¿Cuál es el máximo? ¿Cuál es el mínimo?

Exponente $BSS(2)$	Mantisa $BSS(2)$
--------------------	------------------



Rango: $[0, 24]$

Exponente $BSS(2)$	Mantisa $SM(2)$
--------------------	-----------------



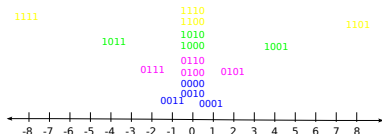
¿Cuál es el máximo? ¿Cuál es el mínimo?

Exponente $BSS(2)$	Mantisa $BSS(2)$
--------------------	------------------



Rango: $[0, 24]$

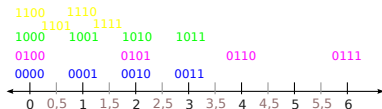
Exponente $BSS(2)$	Mantisa $SM(2)$
--------------------	-----------------



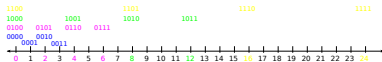
Rango: $[-8, 8]$

¿Cuál es el máximo? ¿Cuál es el mínimo?

Exponente $SM(2)$	Mantisa $BSS(2)$
-------------------	------------------

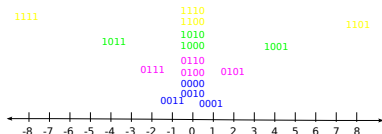


Exponente $BSS(2)$	Mantisa $BSS(2)$
--------------------	------------------



Rango: $[0, 24]$

Exponente $BSS(2)$	Mantisa $SM(2)$
--------------------	-----------------



Rango: $[-8, 8]$

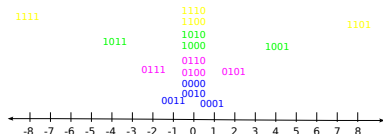
¿Cuál es el máximo? ¿Cuál es el mínimo?

Exponente *BSS*(2) | Mantisa *BSS*(2)



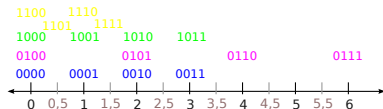
Rango: [0,24]

Exponente *BSS*(2) | Mantisa *SM*(2)



Rango: [-8,8]

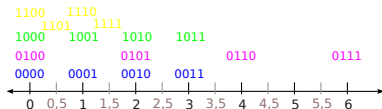
Exponente *SM*(2) | Mantisa *BSS*(2)



Rango: [0,6]

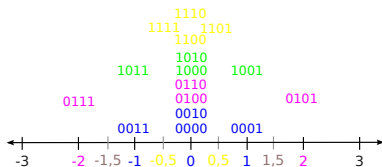
¿Cuál es el máximo? ¿Cuál es el mínimo?

Exponente $SM(2)$	Mantisa $BSS(2)$
-------------------	------------------



Rango: $[0,6]$

Exponente $SM(2)$	Mantisa $SM(2)$
-------------------	-----------------

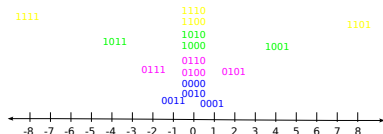


Exponente $BSS(2)$	Mantisa $BSS(2)$
--------------------	------------------



Rango: $[0,24]$

Exponente $BSS(2)$	Mantisa $SM(2)$
--------------------	-----------------



Rango: $[-8,8]$

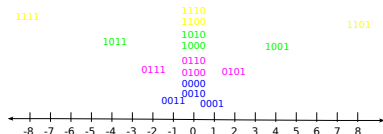
¿Cuál es el máximo? ¿Cuál es el mínimo?

Exponente <i>BSS</i> (2)	Mantisa <i>BSS</i> (2)
--------------------------	------------------------



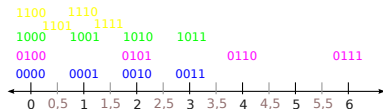
Rango: [0,24]

Exponente <i>BSS</i> (2)	Mantisa <i>SM</i> (2)
--------------------------	-----------------------



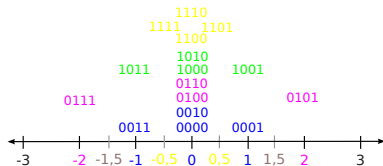
Rango: [-8,8]

Exponente <i>SM</i> (2)	Mantisa <i>BSS</i> (2)
-------------------------	------------------------



Rango: [0,6]

Exponente <i>SM</i> (2)	Mantisa <i>SM</i> (2)
-------------------------	-----------------------



Rango: [-2,2]

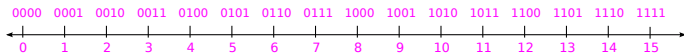
Ejercicio: Completar la tabla!

M	SM(2)	E	CA2(2)
---	-------	---	--------

Hablemos de resolución

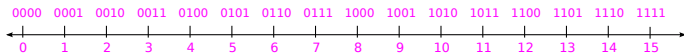
Resolución

- Los sistemas enteros tienen siempre resolución igual a 1

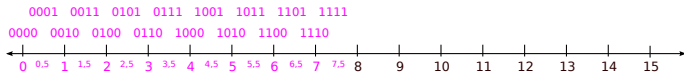


Resolución

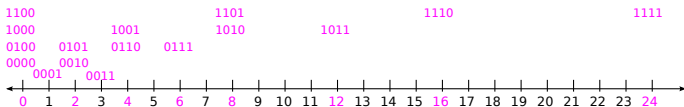
- Los sistemas enteros tienen siempre resolución igual a 1



- Los sistemas de punto fijo tienen resolución fija (< 1)

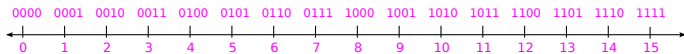


- Los sistemas de punto flotante ...

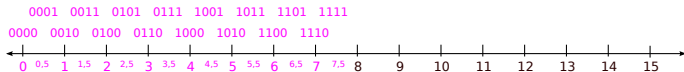


Resolución

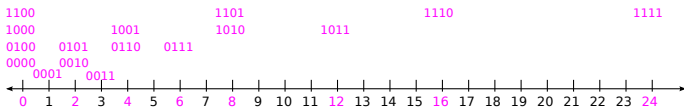
- Los sistemas enteros tienen siempre resolución igual a 1



- Los sistemas de punto fijo tienen resolución fija (< 1)



- Los sistemas de punto flotante ...



¡Resolución variable!



Con punto flotante no se representan mas valores que con punto fijo.
¿Porqué?

- M en $SM(11)$
- E en $CA2(5)$

¿Cuál es la resolución del sistema?

¿Cuál es la resolución del sistema?

- M en $SM(11)$
- E en $CA2(5)$

¿Cómo se calcula la resolución?

¿Cuál es la resolución del sistema?

- M en $SM(11)$
- E en $CA2(5)$

¿Cómo se calcula la resolución?



Tomando una cadena cualquiera...

$$\mathcal{I}(0000110110000100) = +54 * 2^4 = 864$$

y calculando la distancia al inmediato anterior o posterior

¿Cuál es la resolución del sistema? (M:SM(11), E:CA2(5))

$$\mathcal{I}(0000110110000100) = +54 * 2^4 = 864$$

¿Cuál es la resolución del sistema? (M:SM(11), E:CA2(5))

$$\mathcal{I}(0000110110000100) = +54 * 2^4 = 864$$

Inmediato anterior

¿Cuál es la resolución del sistema? (M:SM(11), E:CA2(5))

$$\mathcal{I}(0000110110000100) = +54 * 2^4 = 864$$

Inmediato anterior



M=53, se tiene:

$$\begin{aligned} R &= |53 * 2^4 - 54 * 2^4| = |(53 - 54) * 2^4| \\ &= |-1 * 2^4| = 2^4 \end{aligned}$$

Inmediato posterior

¿Cuál es la resolución del sistema? (M:SM(11), E:CA2(5))

$$\mathcal{I}(0000110110000100) = +54 * 2^4 = 864$$

Inmediato anterior



M=53, se tiene:

$$\begin{aligned} R &= |53 * 2^4 - 54 * 2^4| = |(53 - 54) * 2^4| \\ &= |-1 * 2^4| = 2^4 \end{aligned}$$

Inmediato posterior



M=55, se tiene:

$$\begin{aligned} R &= |55 * 2^4 - 54 * 2^4| = \\ &= |1 * 2^4| = 2^4 \end{aligned}$$

¿Cuál es la resolución del sistema? (M:SM(11), E:CA2(5))

$$\mathcal{I}(0000001110011011) = +14 * 2^{-5} = 0,4375$$

¿Cuál es la resolución del sistema? (M:SM(11), E:CA2(5))

$$\mathcal{I}(0000001110011011) = +14 * 2^{-5} = 0,4375$$

Inmediato anterior

¿Cuál es la resolución del sistema? (M:SM(11), E:CA2(5))

$$I(0000001110011011) = +14 * 2^{-5} = 0,4375$$

Inmediato anterior



Inmediato posterior

M=13, se tiene:

$$\begin{aligned} R &= |13 * 2^{-5} - 14 * 2^{-5}| \\ &= |-1 * 2^{-5}| = 2^{-5} = 0,03125 \end{aligned}$$

¿Cuál es la resolución del sistema? (M:SM(11), E:CA2(5))

$$I(0000001110011011) = +14 * 2^{-5} = 0,4375$$

Inmediato anterior



M=13, se tiene:

$$\begin{aligned} R &= |13 * 2^{-5} - 14 * 2^{-5}| \\ &= |-1 * 2^{-5}| = 2^{-5} = 0,03125 \end{aligned}$$

Inmediato posterior



M=15, se tiene:



$$\begin{aligned} R &= |15 * 2^{-5} - 14 * 2^{-5}| = \\ &= |1 * 2^{-5}| = 2^{-5} = 0,03125 \end{aligned}$$

Resolución variable

La resolución depende del valor del exponente

Resolución variable

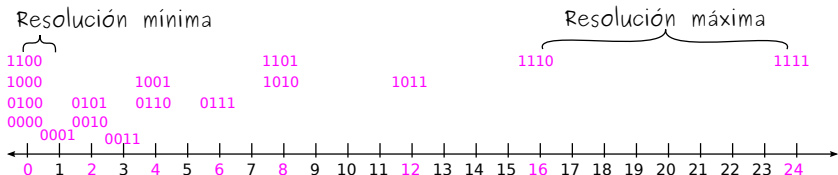
La resolución depende del valor del exponente

- Si el exponente es pequeño  los números se acercan a cero y la resolución se achica aumentando la precisión
- Si el exponente es grande  los números acercan a los extremos del rango y la resolución se agranda perdiendo precisión.

Resolución variable

La resolución depende del valor del exponente

- Si el exponente es pequeño \dots los números se acercan a cero y la resolución se achica aumentando la precisión
- Si el exponente es grande \dots los números se acercan a los extremos del rango y la resolución se agranda perdiendo precisión.



Mantisas enteras ó fraccionarias

Mantisas enteras o fraccionarias

Mantisa entera

el punto fraccionario se asume a la derecha del bit menos significativo. Todos los bits son enteros

Mantisas enteras o fraccionarias

Mantisa entera

el punto fraccionario se asume a la derecha del bit menos significativo. Todos los bits son enteros

Mantisa $BSS(10)$	Exponente
-------------------	-----------

Mantisas enteras o fraccionarias

Mantisa entera

el punto fraccionario se asume a la derecha del bit menos significativo. Todos los bits son enteros

Mantisa BSS(10)	Exponente
------------------------	-----------

Mantisa fraccionaria

el punto fraccionario se asume a la izquierda del bit más significativo. Todos los bits son fraccionarios

Mantisas enteras o fraccionarias

Mantisa entera

el punto fraccionario se asume a la derecha del bit menos significativo. Todos los bits son enteros

Mantisa BSS(10)	Exponente
------------------------	-----------

Mantisa fraccionaria

el punto fraccionario se asume a la izquierda del bit más significativo. Todos los bits son fraccionarios

Mantisa BSS(0,9)	Exponente
-------------------------	-----------

Mantisas enteras o fraccionarias

Ejemplo

- Sistema de Punto Flotante, con 10 bits de mantisa entera, 1 bit de signo y 5 de exponente en Exceso.
El número $0011001100\ 0\ 01010_2$ es $N = 204 * 2^{-6} = 3,1875$
- Considerando ahora mantisa fraccionaria:
El número $0011001100\ 0\ 01010_2$ es $N = (204/2^{10}) * 2^{-6} = 0,00311279296875$

Múltiples representaciones

Mantisa $SM(11)$

Exponente $Ex(5, 16)$

Ejercicio: Interpretar las siguientes cadenas de bits

- 1 0000000100 0 10001
- 2 0000001000 0 10000
- 3 0000010000 0 01111
- 4 1000000000 0 01010

Múltiples representaciones

Mantisa $SM(11)$

Exponente $Ex(5, 16)$

Ejercicio: Interpretar las siguientes cadenas de bits

① 0000000100 0 10001

$$\textcircled{1} \mathcal{I}(0000000100010001) = 4 * 2^1 = 8$$

② 0000001000 0 10000

$$\textcircled{2} \mathcal{I}(0000001000010000) = 8 * 2^0 = 8$$

③ 0000010000 0 01111

$$\textcircled{3} \mathcal{I}(0000010000001111) = 16 * 2^{-1} = 8$$

④ 1000000000 0 01010

$$\textcircled{4} \mathcal{I}(1000000000001010) = 512 * 2^{-6} = 8$$

Múltiples representaciones

Mantisa $SM(11)$

Exponente $Ex(5, 16)$

Ejercicio: Interpretar las siguientes cadenas de bits

① 0000000100 0 10001

$$\textcircled{1} \mathcal{I}(0000000100010001) = 4 * 2^1 = 8$$

② 0000001000 0 10000

$$\textcircled{2} \mathcal{I}(0000001000010000) = 8 * 2^0 = 8$$

③ 0000010000 0 01111

$$\textcircled{3} \mathcal{I}(0000010000001111) = 16 * 2^{-1} = 8$$

④ 1000000000 0 01010

$$\textcircled{4} \mathcal{I}(1000000000001010) = 512 * 2^{-6} = 8$$

¡El número 8 se puede escribir de varias maneras!

Múltiples representaciones

¡El número 8 se puede escribir de varias maneras!

Múltiples representaciones

¡El número 8 se puede escribir de varias maneras!



¡El sistema es ambiguo!

¡Se desperdician cadenas!

Normalización

Múltiples representaciones: Normalización

Cadena normalizada

Una cadena **está normalizada**, si su dígito más significativo (el de más a la izquierda) es diferente a 0. Si un número tiene representación normalizada, ésta será única.

Múltiples representaciones: Normalización

Cadena normalizada

Una cadena **está normalizada**, si su dígito más significativo (el de más a la izquierda) es diferente a 0. Si un número tiene representación normalizada, ésta será única.

- 1 0000000100 0 10001
- 2 0000001000 0 10000
- 3 0000010000 0 01111
- 4 1000000000 0 01010 (Cadena normalizada)

Múltiples representaciones: Normalización

Cadena normalizada

Una cadena **está normalizada**, si su dígito más significativo (el de más a la izquierda) es diferente a 0. Si un número tiene representación normalizada, ésta será única.

- 1 0000000100 0 10001
- 2 0000001000 0 10000
- 3 0000010000 0 01111
- 4 1000000000 0 01010 (Cadena normalizada)

Sistema Normalizado

Diremos que un sistema es un sistema normalizado, si todas sus cadenas están normalizadas.

Múltiples representaciones: Normalización

¿Cómo represento el cero en un sistema
normalizado?
(M $BSS(2)$, E $BSS(2)$)

Múltiples representaciones: Normalización

¿Cómo represento el cero en un sistema
normalizado?
(M $BSS(2)$, E $BSS(2)$)



El número 0 no tiene representación normalizada
posible

Múltiples representaciones: Normalización

¿Cómo represento el cero en un sistema
normalizado?
(M $BSS(2)$, E $BSS(2)$)



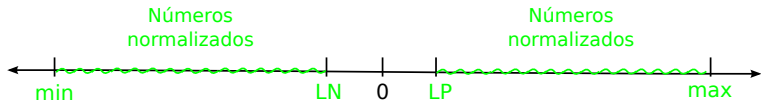
El número 0 no tiene representación normalizada
posible



Un sistema normalizado no puede representar el
número 0

Múltiples representaciones: Normalización

Un sistema normalizado no puede representar el número 0



Múltiples representaciones: Normalización

Sistema normalizado

Múltiples representaciones: Normalización

Sistema normalizado



Cadenas descartadas: las que comienzan con **0**

Múltiples representaciones: Normalización

Sistema normalizado



Cadenas descartadas: las que comienzan con **0**



¿Solución?

Bit implícito

Si todas las cadenas están normalizadas, podemos omitir la escritura del primer bit

Bit implícito

Si todas las cadenas están normalizadas, podemos omitir la escritura del primer bit



Se gana un bit!

Bit implícito

Sistema **SIN** bit implícito

Exponente $BSS(2)$	Mantisa $BSS(2)$
--------------------	------------------

Bit implícito

Sistema **CON** bit implícito

Exponente $BSS(2)$	Mantisa $BSS(2)$
--------------------	------------------

Sistema **SIN** bit implícito

Exponente $BSS(2)$	Mantisa $BSS(2)$
--------------------	------------------



$$\mathcal{I}(0011) = (2^1 + 2^0) * 2^0 = 3$$

Bit implícito

Sistema **CON** bit implícito

Exponente $BSS(2)$	Mantisa $BSS(2)$
--------------------	------------------

 $\mathcal{I}(0011)$ Sistema **SIN** bit implícito

Exponente $BSS(2)$	Mantisa $BSS(2)$
--------------------	------------------



$$\mathcal{I}(0011) = (2^1 + 2^0) * 2^0 = 3$$

Bit implícito

Sistema **CON** bit implícito

Exponente $BSS(2)$	Mantisa $BSS(2)$
--------------------	------------------



$\mathcal{I}(0011)$

Sistema **SIN** bit implícito

Exponente $BSS(2)$	Mantisa $BSS(2)$
--------------------	------------------



$$\mathcal{I}(0011) = (2^1 + 2^0) * 2^0 = 3$$



$$\mathcal{I}(00\mathbf{1}11) = (2^2 + 2^1 + 2^0) * 2^0 = 7$$

Bit implícito

Una mantisa con n bits normalizada...

Sin bit implícito

Tiene 2^n cadenas
donde la mitad son inválidas
 $\therefore \frac{2^n}{2} = 2^{n-1}$ combinaciones

Con bit implícito

Tiene 2^{n+1} cadenas
donde la mitad son inválidas
 $\therefore \frac{2^{n+1}}{2} = 2^n$ combinaciones

Bit implícito

Una mantisa con n bits normalizada...

Sin bit implícito

Tiene 2^n cadenas
donde la mitad son inválidas
 $\therefore \frac{2^n}{2} = 2^{n-1}$ combinaciones

Con bit implícito

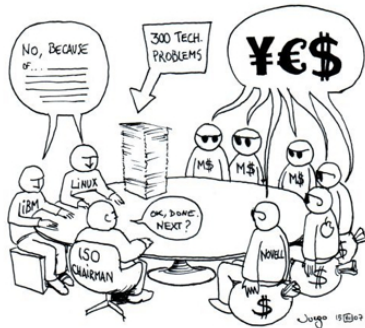
Tiene 2^{n+1} cadenas
donde la mitad son inválidas
 $\therefore \frac{2^{n+1}}{2} = 2^n$ combinaciones ✓

¿Cómo vamos hasta acá?



- Notación científica
- Mantisa y Exponente
- Interpretación
- Resolución **variable**
- Rango
- Mantisas enteras vs fraccionarias
- Representaciones múltiples
- Normalización **de mantisas** y bit implícito

Estándar de Punto Flotante: IEEE 754



Es un estándar que define:

- Formatos numéricos
- Reglas de redondeo
- Operaciones aritméticas
- Manejo de condiciones especiales: división por cero, desborde, etc.

Estándar IEEE 754

Define dos formatos para manejar números reales

- Precisión simple (32 bits)

S	Exp: $E_x(8, 127)$	Mant: $SM(24, 23)$ Norm c/bi
---	--------------------	------------------------------

Estándar IEEE 754

Define dos formatos para manejar números reales

- Precisión simple (32 bits)

S	Exp: $E_x(8, 127)$	Mant: $SM(24, 23)$ Norm c/bi
---	--------------------	------------------------------

- Precisión doble (64 bits)

S	Exp: $E_x(11, 1023)$	Mant: $SM(53, 52)$ Norm c/bi
---	----------------------	------------------------------

IEEE 754

Las cadenas se clasifican

- Ceros

0	0 ... 0	0 ... 0
1	0 ... 0	0 ... 0
- Denormalizados

0	0 ... 0	m...m
1	0 ... 0	m...m
- Normalizados

0	e...e	m...m
1	e...e	m...m
- Infinitos

0	1...1	0...0
1	1...1	0...0
- Not a Number (Nan)

0	1...1	m...m
1	1...1	m...m

IEEE 754

Las cadenas se clasifican

- Ceros

0	0 ... 0	0 ... 0
1	0 ... 0	0 ... 0
- Denormalizados

0	0 ... 0	m...m
1	0 ... 0	m...m
- Normalizados

0	e...e	m...m
1	e...e	m...m
- Infinitos

0	1...1	0...0
1	1...1	0...0
- Not a Number (Nan)

0	1...1	m...m
1	1...1	m...m

IEEE 754

Las cadenas se clasifican

- Ceros

0	0 ... 0	0 ... 0
1	0 ... 0	0 ... 0
- Denormalizados

0	0 ... 0	m...m
1	0 ... 0	m...m
- Normalizados

0	e...e	m...m
1	e...e	m...m
- Infinitos

0	1...1	0...0
1	1...1	0...0
- Not a Number (Nan)

0	1...1	m...m
1	1...1	m...m

IEEE 754

Las cadenas se clasifican

- Ceros

0	0 ... 0	0 ... 0
1	0 ... 0	0 ... 0
- Denormalizados

0	0 ... 0	m...m
1	0 ... 0	m...m
- Normalizados

0	e...e	m...m
1	e...e	m...m
- Infinitos

0	1...1	0...0
1	1...1	0...0
- Not a Number (Nan)

0	1...1	m...m
1	1...1	m...m

IEEE 754

Las cadenas se clasifican

- Ceros

0	0 ... 0	0 ... 0
1	0 ... 0	0 ... 0
- Denormalizados

0	0 ... 0	m...m
1	0 ... 0	m...m
- Normalizados

0	e...e	m...m
1	e...e	m...m
- Infinitos

0	1...1	0...0
1	1...1	0...0
- Not a Number (Nan)

0	1...1	m...m
1	1...1	m...m

IEEE 754

Las cadenas se clasifican

- Ceros

0	0 ... 0	0 ... 0
1	0 ... 0	0 ... 0
- Denormalizados

0	0 ... 0	m...m
1	0 ... 0	m...m
- Normalizados

0	e...e	m...m
1	e...e	m...m
- Infinitos


0	1...1	0...0
1	1...1	0...0
- Not a Number (Nan)

0	1...1	m...m
1	1...1	m...m

Números normalizados




0	e...e	m...m
1	e...e	m...m

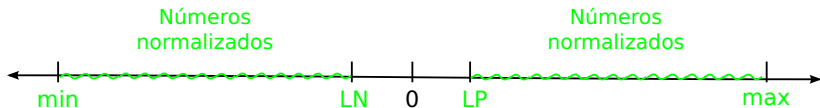
- Las cadenas normalizadas se identifican con exponente entre $0...1$ y $1...0$  El rango del exponente es: **$[-126, 127]$**
- El bit implícito **de la mantisa** es **1**

Números normalizados



0	e...e	m...m
1	e...e	m...m

- Las cadenas normalizadas se identifican con exponente entre 0...1 y 1...0  El rango del exponente es: **[-126,127]**
- El bit implícito **de la mantisa** es **1**



IEEE 754: Ceros

0	0 ... 0	0 ... 0
1	0 ... 0	0 ... 0

Son dos cadenas cuyo objetivo es

- Representar el valor 0
- Representar un número muy cercano a 0 (resultado de una operación)

Números Denormalizados

0	0 ... 0	m...m
1	0 ... 0	m...m

- Las cadenas no normalizadas se identifican con exponente 0...0 y mantisa no nula
- Tienen **bit implícito igual a 0**
- Utilizan **exponente=-126**

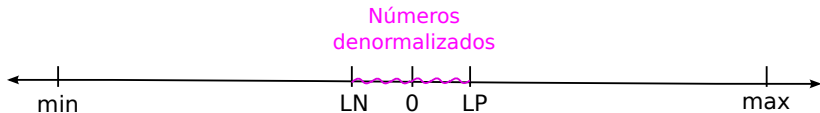
Números Denormalizados

0	0 ... 0	m...m
1	0 ... 0	m...m

- Las cadenas no normalizadas se identifican con exponente 0...0 y mantisa no nula
- Tienen **bit implícito igual a 0**
- Utilizan **exponente=-126**



Están ubicados entre el límite positivo y el negativo de los normalizados



Infinitos

- Las cadenas se identifican con exponente 1...1 y mantisa 0...0
- Puede usarse como operando!

0	1...1	0...0
1	1...1	0...0

Infinitos

- Las cadenas se identifican con exponente 1...1 y mantisa 0...0
- Puede usarse como operando!

0	1...1	0...0
1	1...1	0...0



Respetando las reglas aritméticas

$$inf + x = inf$$

$$x/inf = 0$$

Not a Number (NaN)

0	1...1	m...m
1	1...1	m...m

- Las operaciones aritméticas pueden dar resultados no válidos
- Los distintos estados de error deben denotarse mediante las cadenas especiales
- Las cadenas se identifican con exponente 1...1 y mantisa distinta a 0...0

¡A interpretar!

Ejercicios

- Ceros

0	0 ... 0	0 ... 0
1	0 ... 0	0 ... 0

- Denormalizados

0	0 ... 0	m...m
1	0 ... 0	m...m

- Normalizados

0	e...e	m...m
1	e...e	m...m

- Infinitos

0	1...1	0...0
1	1...1	0...0

- Not a Number (Nan)


0	1...1	m...m
1	1...1	m...m

- 0 00000000
000000000000000000000000
- 0 00000000
100000000000000000000000
- 0 00000000
000000000000000000000001
- 0 00000001
000000000000000000000000
- 0 00000001
100000000000000000000000
- 0 00000001
000000000000000000000001


Interpretar

- 0 00000000 00000000000000000000000000000000


Interpretar

- 0 00000000 000000000000000000000001  denormalizado!

Interpretar

- 0 00000000 000000000000000000000001  denormalizado!

Interpretar

- 0 00000000 000000000000000000000001  denormalizado!




$$E = -126$$

$$M = \mathcal{I}_{sm(1,23)}(000000000000000000000001)$$

$$N = 2^{-23} * 2^{-126}$$

- 0 00000001 000000000000000000000000

Interpretar

- 0 00000000 000000000000000000000001  denormalizado!




$$E = -126$$

$$M = \mathcal{I}_{sm(1,23)}(000000000000000000000001)$$

$$N = 2^{-23} * 2^{-126}$$

- 0 00000001 000000000000000000000000  normalizado!

Interpretar

- 0 00000000 000000000000000000000001  denormalizado!




$$E = -126$$

$$M = \mathcal{I}_{sm(1,23)}(000000000000000000000001)$$

$$N = 2^{-23} * 2^{-126}$$

- 0 00000001 000000000000000000000000  normalizado!

Interpretar

- 0 00000000 0000000000000000000000001  denormalizado!



$$E = -126$$

$$M = \mathcal{I}_{sm(1,23)}(0000000000000000000000001)$$

$$N = 2^{-23} * 2^{-126}$$

- 0 00000001 0000000000000000000000000  normalizado!



$$E = 1 - 127 = -126$$

$$M = \mathcal{I}_{sm(1,23)}(1000000000000000000000000)$$

$$N = 1 * 2^{-126}$$

Interpretar

- 0 00000001 100000000000000000000000



- 1 Punto Flotante
 - Interpretación
 - Rango y resolución
 - Múltiples representaciones: Normalización
 - Bit implícito
- 2 IEEE 754
 - Clases
 - Interpretación