

PROGRAMACIÓN LINEAL

Los problemas de **Programación Lineal** son aquellos donde se trata de encontrar el ***óptimo de una función***, por ejemplo máximo de beneficios, o mínimo de costos, siendo esta **función lineal**.

Además dicha solución se debe ajustar a ciertas condiciones o ***restricciones***, por ejemplo disponibilidad, demanda, limitaciones financieras, etc. Estas restricciones **son también funciones lineales**.

Veamos estos conceptos en un ejemplo :

Ejemplo :

Un pastelero tiene 150 kg de harina, 44 kg de azúcar y 27,5 kg de mantequilla para hacer dos tipos de pasteles P y Q. Para hacer una docena de pasteles de tipo P necesita 3 kg de harina, 2 kg de azúcar y 1 de mantequilla y para hacer una docena de tipo Q necesita 6 kg de harina, 1 kg de azúcar y 1 kg de mantequilla.

Si tiene que satisfacer una demanda mínima de 2 docenas de tipo P y no superar las 20 docenas

El beneficio que obtiene por una docena de tipo P es \$20 y por una docena de tipo Q es \$30. ¿Cuál es el número de docenas que tiene que hacer de cada clase para que el beneficio sea máximo?

Respuesta:

Para encontrar la solución del problema les propongo seguir el siguiente procedimiento:

1. tener en claro cuales son las incógnitas (variables) que me presenta el problema y por lo tanto aquellas que debo averiguar
2. Remplazar estas variables con datos arbitrarios primero y finalmente con los valores obtenidos y verificar si tiene sentido el planteo.
3. Aplicar el método apropiado o posible para hallar la solución.
4. verificar la solución hallada.

En este ejemplo la pregunta es :

¿Cuál es el número de docenas que tiene que hacer de cada clase para que el beneficio sea máximo?

Se desprende inmediatamente que aquello que tenemos que averiguar es : Cuantas docenas de pasteles tipo P (p) y cuantas docenas de pasteles tipo Q (q). Estas son las 2 incógnitas (variables) del problema.

Estas 2 incógnitas que llamamos p y q, deben cumplir con todas las restricciones o condiciones descritas en el enunciado del problema y además maximizar el beneficio.

Planteo:

$$\text{Max de } f(p,q) = \$20 \cdot p + \$30 \cdot q$$

Sujeto a las restricciones:

$$\left\{ \begin{array}{l} 3\text{kg} \cdot p + 6\text{kg} \cdot q \leq 150 \text{ kg} \\ 2\text{kg} \cdot p + 1\text{kg} \cdot q \leq 44 \text{ kg} \\ 1\text{kg} \cdot p + 1\text{kg} \cdot q \leq 27,5 \text{ kg} \\ p \geq 2 \text{ docenas} \\ p \leq 20 \text{ docenas} \\ p \geq 0 ; q \geq 0 \end{array} \right.$$

La condición : '**p**' e '**q**' deben ser ambas positivas o cero se debe a que no tiene sentido en los problemas que trata la programación lineal obtener resultados negativos. ¿Tiene algún sentido fabricar **-2** docenas ??

Por tratarse de un problema de 2 variables podemos aplicar álgebra del plano (R^2), que permite representar rectas y semiplanos.

Si graficamos las inecuaciones (conjunto de restricciones), tenemos presente que la igualdad es la recta y ésta limita los 2 semiplanos que corresponden a las desigualdades. Uno de dichos semiplanos representa la restricción que se corresponde con la desigualdad del planteo.

Dado que todas las inecuaciones deben cumplirse, es decir de la condición de simultaneidad, resulta el polígono que es la intersección de todos los semiplanos, donde están los infinitos puntos que cumplen las restricciones simultáneamente.

La solución debe pertenecer a este polígono, es un punto interior o de los lados de esta figura.

Además para representar la Función Objetivo, beneficio total: $z = f(p, q) = 20 \cdot p + 30 \cdot q$ procedemos de la siguiente manera:

La función también es lineal, es decir una recta. Esta recta tiene pendiente $-20/30$, pues si hacemos $f(p,q)=0$ resulta la recta en el origen

$$20 \cdot p + 30 \cdot q = 0$$

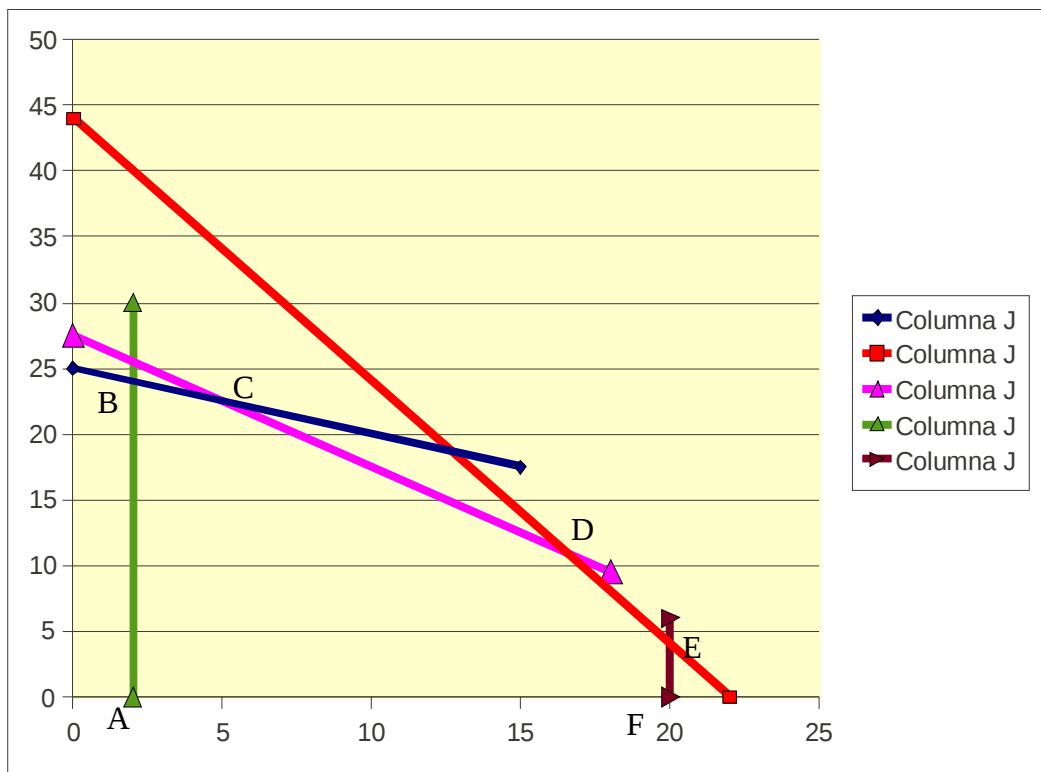
$$q = (-20/30) \cdot p$$

cualquier otro valor de z será una recta **paralela** a la representada en el origen en color celeste donde $z=0$ pues si $20 \cdot p + 30 \cdot q = k$ (número real), sólo se modifica término independiente de la recta, es decir la ordenada al origen de la recta.

Los valores de z crecerán en el sentido de la normal a la recta verde representada.

La solución debe estar en el polígono y debe hacer máximo la FO, es decir estar en la recta que representa la FO y dentro del polígono.

Aquel donde z tiene un máximo valor se encontrará en un vértice, en este ejemplo en el vértice **Q**



vértices de polígono:

Los vértices del polígono son la intersección de 2 rectas. El par de valores (x,y) de cada vértice se debe hallar resolviendo el sistema de 2 ecuaciones con 2 incógnitas por alguno de los métodos algebraicos conocidos: sustitución, igualación, sumas y restas, determinantes, etc

Por ejemplo para hallar el vértice B, es la intersección de la recta verde y azul, el C es la recta azul y fucsia, D roja y fucsia, E roja y marrón, el sistema para obtener el vértice B es :

$$\begin{cases} p = 2 \\ 3p + 6q = 150 \end{cases}$$

Luego por sustitución es $p=2$; $3*2+6*q=150$; $q= (150-6)/6 = 24$

Resolviendo el sistema correspondiente en cada caso se obtienen cada uno de los vértices. Una vez hallado cada vértice podemos construir la tabla y obtener el valor del funcional para cada uno de ellos.

	p	q	$z=f(p,q)=20p+30q$
A	2	0	40
B	2	24	760
C	5	22,5	775
D	16,5	11	660
E	20	4	520
F	20	0	400

La solución del problema es : beneficio total máximo $z = \$775$

p: 5 docenas de pasteles tipo P

q: $22 \frac{1}{2}$ docenas de pasteles tipo Q

IMPORTANTE

Qué pasa si la FO es paralela al lado azul del polígono?

Es decir con las mismas restricciones pero se modifica en el enunciado los valores del beneficio de los pasteles tipo Q a \$40

En este caso por ejemplo la FO = $\max (20 p + 40 q)$

La recta de la FO en el origen

$$20 \cdot p + 40 \cdot q = 0$$

$$q = (-20/40) \cdot p = -1/2 p$$

Con igual pendiente que el lado del polígono que representa la restricción 1

$$3 \text{kg} \cdot p + 6 \text{kg} \cdot q = 150 \text{ kg}$$

Es evidente que la FO al crecer en el sentido de su normal, cuando alcance el vértice Q se superpone con todo el lado. Es decir tomará el mismo valor para los infinitos puntos del segmento de ese lado. También se evidencia en la construcción de tabla:

	x	y	$z=f(x,y)=20x+40y$
O	2	0	40
P	2	24	1000
Q	5	22,5	1000
R	16,5	11	473
S	20	4	560
T	20	0	400

Para los 2 vértices que forman el lado el valor de $Z=FO = 1000$. También resultará 1000 en cualquier punto del lado.

Podemos decir entonces que el problema tiene óptimo = 1000 para infinitos puntos (x,y) del lado. Se trata de un problema con **infinitas soluciones determinadas** pues el óptimo es único pero para infinitos valores de las incógnitas.

Otras posibilidades:

- 1) Qué pasa si el polígono no se forma?
- 2) Qué pasa si el polígono es abierto?

Para analizar estas cuestiones consultar el sitio:

<http://thales.cica.es/rd/Recursos/rd98/Matematicas/29/matematicas-29.html>

Tipos de solución:

[distintas situaciones](#)

Método gráfico de resolución de Programación lineal

El ejemplo nos permitió resolver el problema, es decir encontrar la solución simplemente aplicando conocimientos elementales de álgebra.

Este método se conoce como método gráfico y es posible en problemas de Programación Lineal con **2 incógnitas**

pasos:

1. Representar cada recta que expresa la igualdad de cada inecuación (restricción)
2. Encontrar cada semiplano que corresponde a la desigualdad.
3. Obtener de la intersección de los semiplanos, llamado polígono solución.
4. Representar la Función Objetivo en el origen y de acuerdo a su normal ver en qué sentido crece.
5. Analizar el polígono para interpretar tipo de solución posible.
6. Hallar las intersecciones de cada par de rectas por algún método algebraico (vértices del polígono) donde están las posibles soluciones óptimas.
7. Considerar las rectas de nivel para anticipar el vértice donde z tendrá el mayor(menor) valor según corresponda a un problema de máximo o de mínimo.
8. Reemplazar los vértices en la función objetivo y comprobar donde se encuentra el máximo(mínimo) valor de la FO.

Planteo General de Programación Lineal

Generalizamos los conceptos para más de 2 variables:

Tenemos **n** incógnitas y **m** restricciones que se deben cumplir

Incógnitas: $x_1; x_2; x_3; x_4; \dots x_n$

optimizar $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$

sujeto a las siguientes restricciones

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \leq (\geq) b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \leq (\geq) b_2 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \leq (\geq) b_m \end{cases}$$

Dentro de un **poliedro convexo** limitado por un conjunto de restricciones lineales, que incluyen las condiciones de no negatividad:

$$x_n \geq 0$$

La **solución analítica** se puede obtener aplicando diferentes métodos, en clase se desarrollará el método que se conoce con el nombre de **simplex**

La justificación del método se basa en transformar la inecuaciones en ecuaciones, para ello agrega a cada inecuación (sumando o restando, según corresponda a la desigualdad) variables no negativas que se llaman de slack (pueden encontrarlas con los nombres: flojas o de holgura), las designamos con la letra del alfabeto griego λ_i para diferenciarlas de las reales.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n + \lambda_1 & = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n + \lambda_2 & = b_2 \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \end{cases}$$

Este sistema de ecuaciones se puede resolver por un método iterativo **SIMPLEX**. El **simplex** requiere de que todos los valores de b_i sean mayores o iguales a cero. Es un algoritmo iterativo, en cada iteración se va aproximando a la solución con el agregado de ir optimizando la función objetivo. En la función objetivo las variables slack (flojas) se agregan con costo cero para no modificar el valor del óptimo. El desarrollo del método paso a paso se encuentra detallado en el documento: [SIMPLEX.pdf](#)

Existen actualmente muchos programas de aplicaciones para resolver este algoritmo. Podemos utilizar en la planilla de cálculo 'excel' la herramienta que se llama ***solver***

La descripción de un ejemplo con el uso de dicha herramienta se encuentra en un documento 'ejemplo_Solver.xls'

PROBLEMA DUAL

Veamos el planteo general del problema de programación lineal. Podemos expresar el conjunto de inecuaciones haciendo uso de matrices de la siguiente manera

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}$$

A **X** **B**

función objetivo: **máximo de $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$**

llamamos **A** a la matriz de los coeficientes, es de **m filas por n columnas**, pues son **m inecuaciones y n incógnitas** llamamos **X** a la matriz de las incógnitas, es

de **n filas por 1 columna** llamamos **B** a la matriz de los términos independientes, es de **m filas por 1 columna**

La notación matricial es $A * X \leq B$

Existe asociado a este problema otro problema llamado **Dual**, de tal manera que si realizamos un simplex del problema original (llamado primal) automáticamente encontraremos la solución del problema dual. Es decir cada problema de programación lineal tiene un problema asociado, un problema simétrico donde si uno busca un máximo el otro busca un mínimo.

El problema dual asociado es el siguiente $A^t * W \geq C$

donde A^t es la transpuesta de la matriz A; (se permutan filas por columnas)

W es el nuevo vector de las incógnitas

C es el vector columna de los términos independientes

C_i que son los coeficientes de la función objetivo

función objetivo: **mínimo de $g(w_1, w_2, \dots, w_m) = b_1 w_1 + b_2 w_2 + \dots + b_m w_m$**

donde los b_i son los términos independientes de las inecuaciones

Es decir es :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_m \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$$

El valor óptimo de $g(w_1, w_2, \dots, w_m)$ es el mismo valor óptimo de $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$

Importante : el Dual cambia el sentido de la desigualdad en las inecuaciones, para ello es necesario primero tener todas las desigualdades con $\leq$ si se trata de un máximo (en el problema primal si la función objetivo es un mínimo las desigualdades deben ser $\geq$)

Ejemplo : Utilizamos el ejemplo anterior

1. Escribimos de manera matricial el problema

$$\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 1 \\ 1 & 1 \\ -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 150 \\ 44 \\ 27,5 \\ -2 \\ 20 \end{pmatrix}$$

Esta ecuación es equivalente a la original multiplicada por -1 para utilizar el signo $\leq$

Problema Primal: $A * X \leq B$

La función objetivo : Max de $f(p,q) = \$20 . p + \$30 . q$

2. El problema Dual en forma matricial es entonces:

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & -1 & 1 \\ 6 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \\ w_5 \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 20 \\ 30 \end{bmatrix}$$

Problema Dual: $A^t * W \geq C$

Mínimo de $g(w_1, w_2, w_3, w_4, w_5) = 150 w_1 + 44 w_2 + 27,5 w_3 - 2 w_4 + 20 w_5$

3. El problema escrito como conjunto de restricciones es :

$$\begin{cases} 3 w_1 + 2 w_2 + w_3 - w_4 + w_5 \geq 20 \\ 6 w_1 + 1 w_2 + w_3 \geq 30 \end{cases}$$

Mínimo de $g(w_1, w_2, w_3, w_4, w_5) = 150 w_1 + 44 w_2 + 27,5 w_3 - 2 w_4 + 20 w_5$

1. No es necesario resolver ambos problemas
2. Si se trata de un problema que tiene solución única, podemos indistintamente resolver cualquiera de los 2 y obtendremos la solución del otro.

Atención:

- Si los dos problemas tiene solución óptima única, los valores de las respectivas funciones objetivos coinciden
- **En nuestro ejemplo $\max f(p, q) = \text{mínimo } g(w_1, w_2, w_3) = 775$**
- Uno puede tener solución No acotada y entonces el otro NO tiene solución.
- Ambos no tienen solución.
- Cuando se resuelve utilizando el método simplex de un problema de PL que corresponde a una **FO mínima**, en el último paso, en la fila donde se obtienen los valores de las variables del Dual asociado, aparecerán con valores negativo ya que en el caso de mínima los $z_j - c_j$ deben ser todos negativos o cero, entonces para la solución de dichas variables se deben modificar el signo, es decir multiplicar estos valores por (-1)

			20	30	0	0	0	0	0	0	0	0	-M		
c	base	p	q	x1	x2	x3	x4	x5	λ_1	b	θ				
0	x1	3	6	1	0	0	0	0	0	150	$150/3=50$				
0	x2	2	1	0	1	0	0	0	0	44	$44/2=22$				
0	x3	1	1	0	0	1	0	0	0	27,5	$27,5/1=27,5$				
-M	λ_1	1	0	0	0	0	-1	0	1	2	$2/1=2$			menor de los θ	
0	x5	1	0	0	0	0	0	1	0	20	$20/1=20$				
$Z_j - c_j$		-M-20	-30	0	0	0	M	0	0	0					

menor de los negativo (mayor en valor absoluto de los negativos)

c	base	p	q	x1	x2	x3	x4	x5	λ_1	b	θ				
0	x1	0	6	1	0	0	3	0	-3	144	$144/6=24$			menor de los θ	
0	x2	0	1	0	1	0	2	0	-2	40	$40/1=40$				
0	x3	0	1	0	0	1	1	0	-1	25,5	$25,5/1=25,5$				
20	p	1	0	0	0	0	-1	0	1	2	2/0 no corresp				
0	x5	0	0	0	0	0	1	1	-1	18	18/0 no corr				
$Z_j - c_j$		0	-30	0	0	0	-20	0	20+M	40					

c	base	p	q	x1	x2	x3	x4	x5	λ_1	b	θ				
30	q	0	1	1/6	0	0	1/2	0	-1/2	24	$24/(1/2)=48$				
0	x2	0	0	-1/6	1	0	3/2	0	-3/2	16	32/3				
0	x3	0	0	-1/6	0	1	1/2	0	-1/2	3/2	3				
20	p	1	0	0	0	0	-1	0	1	2	2/-1= no cor				
0	x5	0	0	0	0	0	1	1	-1	18	$18/1=18$				
$Z_j - c_j$		0	0	5	0	0	-5	0	105+M	760					

c	base	p	q	x1	x2	x3	x4	x5	λ_1	b	θ				
30	q	0	1	1/3	0	-1	0	0	0	22,5					
0	x2	0	0	1/3	1	-3	0	0	0	11,5					
0	x4	0	0	-1/3	0	2	1	0	-1	3					
20	p	1	0	-1/3	0	2	0	0	0	5					
0	x5	0	0	1/3	0	-2	0	1	0	15					
$Z_j - c_j$		0	0	10/3	0	10	0	0	M	775					

por ser todos los $Z_j - c_j$ positivos este es

$X = (5; 22,5; 0; 11,5; 0; 3; 15)$

$Z = 775$

se corresponden con las variables flojas del primal

El funcional del DUAL = Mínimo de $g(w_1, w_2, w_3, w_4, w_5) = 150 w_1 + 22 w_2 + 27,5 w_3 - 10 w_4 + 25 w_5$

$$G = 150 * (10/3) + 44 * 0 + 27,5 * 10 + 2 * 0 + 20 * 0$$