EL MÉTODO SIMPLEX

Hasta ahora, la única forma que conocemos de resolver un problema de programación lineal, es el método gráfico. Este método es bastante engorroso cuando aumenta el número de restricciones e impracticable en más de dos dimensiones. Para resolver estos problemas, se aplica el método

simplex. Este método se puede aplicar a problemas de cualquier tamaño. (Si bien el ejemplo que veremos es de dos variables con tres restricciones, su generalización es inmediata).

Problema:

La empresa Sv SRL se dedica a la fabricación de manteles de mesa. Fabrica dos modelos, el redondo y el rectangular. Cada uno consume 2 y 3 m^2 de tela, respectivamente. Además deben ser cortados y cosidos a mano, tarea que lleva una hora para los manteles rectangulares y dos para

los redondos. Por último, a los manteles rectangulares se les deben colocar cuatro esquineros de refuerzo.

Semanalmente se pueden conseguir 600 m2 de tela, 600 esquineros y 500 horas de corte y costura. Los márgenes de ganancias son de \$8 para los manteles redondos y 10\$ para los rectangulares.

Resolución:

X1: Cantidad de manteles redondos a fabricar semanalmente [u/sem]
X2: Cantidad de manteles rectangulares a fabricar semanalmente [u/sem]

$$\begin{cases} 2\ X1 + 3\ X2 \leq 600 \\ 4\ X2 \leq 600 \\ 2\ X1 + X2 \leq 500 \end{cases}$$

$$Z(\text{máx}) = 8\ X1 + 10\ X2$$

Para aplicar el método Simplex, el primer paso consiste en transformar las desigualdades en igualdades. Por ejemplo, la primera restricción dice que 2 X1 + 3 X2 es menor o igual que 600. Eso es lo mismo que decir que 2 X1 + 3 X2 mas una cantidad que puede ser cero o mayor que cero, es igual a 600. Si esta cantidad es positiva o cero, entonces puede asignársele su valor a una variable cumpliendo con las condiciones de no negatividad. Por una convención, se le asigna a esta variable el nombre de X3 (O el subíndice que correspondiera, según la cantidad de variables del problema) .

La misma restricción entonces, queda escrita como:

$$2\ X1 + 3\ X2 + X3 = 600$$

Esto no cambia las condiciones del problema (que sigue siendo el mismo), ya que si, por ejemplo, la suma 2 X1 + 3 X2 resulta ser 480, el simplex asignará los 120 restantes a la variable X3. Si intentara asignar un valor de 700 a la suma mencionada, el Simplex no encontrará un valor para darle a la variable X3 (ya que no puede darle valores negativos) y nos dirá que no existe una solución válida para el problema. Podemos ver, entonces, que la variable X3 nos va a indicar cuántos metros cuadrados de tela quedan sin utilizar (o sea, cuantos m2 faltan usar para llegar al límite máximo de 600). A este tipo de variables se las denomina variables slacks, o de holgura. Se denomina variable slack o de holgura a la variable que se debe sumar a uno de los miembros de una restricción para que ambos miembros sean iguales.

El problema queda entonces reescrito así:

$$\begin{aligned} 2\,X1 + 3\,X2 + X3 \qquad\qquad &= 600 \\ 4\,X2 \quad + X4 \qquad &= 600 \\ 2\,X1 + X2 \qquad\qquad + X5 &= 500 \end{aligned}$$

$$Z(\text{máx}) = 8\,X1 + 10\,X2 + 0\,X3 + 0\,X4 + 0\,X5$$

Se dice que un problema de programación lineal está escrito en su forma estándar cuando todas sus restricciones son igualdades y todos los segundos miembros de dichas ecuaciones son constantes posivas (es decir un número real ≥ 0.

Para armar la tabla inicial, se debe comenzar por la matriz A. Esta matriz tiene tantas filas como restricciones tenga el problema, y tantas columnas como variables haya, incluidas las slacks. Los valores de cada elemento de la matriz serán los coeficientes de cada variable (columna de la matriz) en cada restricción (fila de la matriz). En nuestro problema, la matriz A quedaría expresada así:

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{ccccc} X1 & X2 & X3 & X4 & X5 \end{array} \\ \begin{array}{c} R1 \rightarrow \\ R2 \rightarrow \\ R3 \rightarrow \end{array} & \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

La matriz A tiene tantas filas como restricciones haya en el problema y tantas columnas como variables haya. Se forma con los coeficientes de cada variable (columna) en cada restricción (fila). Esta matriz debe incluir a la matriz identidad de orden N, siendo N la cantidad de restricciones del problema. Siempre habrá más columnas que filas en A, ya que en el paso anterior hemos agregado una variable slack por cada restricción. La diferencia entre la cantidad de columnas y de filas será, entonces, la cantidad de variables reales del problema original. (En este caso, 2). Las columnas que forman la matriz identidad no necesitan estar ordenadas (En este caso lo están).

En este caso, por ser todas las restricciones del problema de menor o igual, la matriz identidad estará formada por las columnas de las variables slack. Más adelante, veremos qué sucede cuando esto no es así. (En el apartado Variables Artificiales).

La matriz A pasa a formar la parte central o estructura de la tabla, que se arma así:

C	X	B	x1	x2	x3	x4	x5
0	x3	600	2	3	1	0	0
0	x4	600	0	4	0	1	0
0	x5	500	2	1	0	0	1

En la columna X se deben colocar los nombres de las variables correspondientes a cada fila. (Las que tienen coeficiente 1 en esa fila de la matriz identidad).
En la columna C y sobre la estructura de la tabla, se colocan los coeficientes en el funcional de las variables asociadas a cada fila o columna.
Finalmente, en la columna B se coloca el término independiente de la restricción asociada a cada fila:

SIGNIFICADO DE LA TABLA DE SIMPLEX

La tabla así armada representa un vértice del poliedro del problema.
Este vértice es el determinado por la intersección de las rectas asociadas a las variables que no están representadas por la base canónica. (Esta base está formada por las variables incluidas en la matriz identidad, o sea cuyas columnas tienen como coeficientes uno en la intersección con su propia fila y cero en las demás). En este problema, las variables que no están en la base canónica son X1 y X2.
En dicho vértice, los valores de estas variables son iguales a cero (no se produce ningún mantel), y las demás variables tienen los valores indicados en la columna B (X3 = 600; X4 = 600 y X5 = 500; o sea sobra la totalidad de los recursos).
Las variables que forman la base canónica se indican en la columna X de la tabla. Son las únicas variables que pueden tomar un valor distinto de cero; y su valor está indicado en la columna B.
El valor del funcional en este vértice puede calcularse multiplicando el valor de cada variable (Columna B) por su coeficiente en el funcional (Columna C). (Aquí: 0 . 600 + 0 . 600 + 0 . 500) Las variables que no están en la columna X no influyen en el funcional, ya que tienen valor cero.
En este vértice, el funcional vale cero, ya que no se fabrica ningún producto (X1 y X2 = 0) y está sobrando la totalidad de los recursos (X3 = 600, X4 = 600 y X5 = 500).

El valor contenido en cada coeficiente de la tabla nos indica en cuanto aumentaría o disminuiría el valor de la variable correspondiente a dicha fila de la tabla por cada unidad que disminuyera o aumentara la variable indicada en dicha columna. Por ejemplo, si quisiera darle valor a X1 (O sea, fabricar un(1) mantel redondo), debería disminuir en 2 a X3 (2 m^2 de tela), en 0 a X4 (no utiliza esquineros) y en 2 a X5 (Horas de costura). Estos coeficientes se denominan coeficientes tecnológicos.

			8	10	0	0	0
C	X	B	x1	x2	x3	x4	x5
0	x3	600	2	3	1	0	0
0	x4	600	0	4	0	1	0
0	x5	500	2	1	0	0	1
		Zj	0	0	0	0	0

Entonces puedo saber cómo afectaría a las variables que actualmente influyen en el funcional, aumentar en una unidad el valor de las variables correspondientes a cada columna. El resultado de este cálculo, lo coloco en la parte inferior de la tabla (fila Zj).

Pero si aumento el valor de alguna variable, para saber el cambio real en el funcional, debo restar al valor obtenido anteriormente, el coeficiente en el funcional de la variable representada por cada columna. Este nuevo resultado (Zj – Cj) me indica en cuanto disminuirá el funcional por cada unidad que aumente la variable correspondiente a cada columna.

			8	10	0	0	0
C	X	B	x1	x2	x3	x4	x5
0	x3	600	2	3	1	0	0
0	x4	600	0	4	0	1	0
0	x5	500	2	1	0	0	1
		Zj	0	0	0	0	0
		Zj- Cj	-8	-10	0	0	0

El valor de los Zj – Cj indica cuánto disminuirá el funcional por cada unidad que aumente la variable indicada en dicha columna.

En este caso, aumentar en una unidad la variable X1 hará que el funcional disminuya –8 (o sea, que aumente 8) y producir una unidad más de X2 generará un aumento de 10 (Aquí parece obvio, pero luego no será así).
Con estos datos, sabemos que será mejor aumentar en una unidad el valor de X2 que el de X1, ya generará una mayor ganancia. (Recordemos que el objetivo de este problema es encontrar los valores de las variables que maximicen las ganancias).

Pero el simplex sólo puede analizar vértices. (Además, sabemos que el óptimo estará en un vértice). Entonces, si X2 va a tomar valor, es preciso que una de las variables que actualmente tienen valor, tome valor cero. El próximo vértice a analizar será la intersección de la recta X1 = 0 y la recta correspondiente a la variable que pasa a tomar valor cero. (Y sale, entonces de la base canónica).

Para saber cuál es la variable que toma valor cero, debemos calcular los cocientes entre el valor actual de cada variable (Columna B) y los coeficientes que indican en cuanto disminuye el valor de las variables de la base por cada unidad que aumenta la variable que pasa a tomar valor (En este caso, columna A2).

			8	10	0	0	0	
C	X	B	x1	x2	x3	x4	x5	Ø
0	x3	600	2	3	1	0	0	600/3= 200
0	x4	600	0	4	0	1	0	600/4=150
0	x5	500	2	1	0	0	1	500/1=500
		Zj	0	0	0	0	0	
		Zj- Cj	-8	-10	0	0	0	

Estos cocientes (también llamados θ o titas) nos indican que podemos aumentar X2 hasta 200 para que X3 valga cero; hasta 150 para que X4 valga cero o hasta 500 para que X5 valga cero.
Pero aumentar X2 va a hacer variar a las tres variables. Entonces debemos elegir el menor de los cocientes, ya que elegir uno mayor causará que las variables que tenían cocientes menores tomen valores negativos, lo cual viola las condiciones de no negatividad del problema.

Al elegir qué variable va a salir de la base, debe optarse SIEMPRE por el tita positivo más pequeño, ya que elegir uno mayor nos llevará fuera del poliedro. Nunca deben tenerse en cuenta los titas negativos.

Entonces, X2 debe tomar valor 150, que es cuando X4 pasa a valer cero. Esto significa que se van a fabricar manteles rectangulares hasta que se acaben los esquineros, que serán el primer recurso en agotarse. X4, entonces, saldrá de la base y su lugar será ocupado por X2. La tabla correspondiente al nuevo vértice comienza a completarse así:

			8	10	0	0	0	
C	X	B	x1	x2	x3	x4	x5	Ø
0	x3							
10	x2							150 (menor positivo) entro x2 en lugar de x4
0	x5							
	Zj		0	0	0	0	0	
	Zj- Cj		-8	-10	0	0	0	

negativo -10 < -8 (o mayor en valor absoluto)

Para calcular los valores de la estructura de la tabla debemos aplicar el método del pivote.

Se llama pivote de una tabla al elemento que está en la intersección de la columna de la variable que entra y la fila de la variable que sale

En este caso, el pivote será X4 ∩ X2 = 4. El primer paso consiste en dividir todos los elementos de la fila en la que está el pivote por el valor de éste; para que quede 1 en el lugar del pivote.

			8	10	0	0	0	
C	X	B	x1	x2	x3	x4	x5	Ø
0	x3	600						
0	x2	600/4	0/4	4/4	0/4	1/4	0/4	
0	x5	500						

Aquí podemos ver que X2 tomará valor 150, que es lo que habíamos predicho. En el segundo paso, se debe formar en la tabla del simplex un rectángulo entre el elemento que quiero transformar y el pivote. Por ejemplo, para el B3, el rectángulo será el siguiente:

			8	10	0	0	0	
C	X	B	x1	x2	x3	x4	x5	Ø
0	x3	600	2	3				
0	x2	600/4	0	4	0	1/4	0	
0	x5	500						

Para calcular el nuevo valor del elemento; se debe hallar el producto de las diagonales del rectángulo dividido por el pivote. En el lugar del numero 2 va: (2*4 -0*3) / 4. La primer diagonal que se debe tomar es aquella que contiene en su extremo el pivote.

Para el resto de los valores se procede análogamente hasta completar la tabla. En realidad, las columnas de las variables que están en la base (Incluida la columna del pivote), deben formar siempre la base canónica, es decir estas columnas se pueden completar directamente y no es necesario calcular sus elementos, con lo cual los cálculos se simplifican notablemente.

El nuevo valor del funcional puede calcularse multiplicando los Ck por los Bk en la nueva tabla; o restando al valor anterior del funcional el producto del Zj-Cj de la variable que entra (recordemos que nos indicaba cuánto aumentaría el funcional por cada unidad que aumente la variable) por

el tita de la variable que sale (cuántas unidades podía aumentar la variable).
Obviamente, ambos resultados deben ser iguales.

C	X	B	8 x1	10 x2	0 x3	0 x4	0 x5	Ø
0	x3	150	2	0	1	-3/4	0	150/2 Menor tita positivo
10	x2	150	0	1	0	1/4	0	no se puede dividir por 0 (∞).
0	x5	350	2	0	0	1/4	1	350/2
	Zj	1500	0	10	0	10/4	0	
	Zj- Cj		-8	0	0	10/4	0	

(único negativo)

Esta tabla representa un vértice distinto del poliedro, en donde no se fabrican manteles redondos (X1=0) y se fabrican 150 manteles rectangulares (X2=150), lo que deja una ganancia de $1500. De tela sobran 150 m^2 pues x3 =150 y es la variable floja de la primer inecuación ; sobran 350 horas de costura pues x5 es =350 y es la variable floja de la tercer inecuación; y los esquineros se utilizan todos pues x4 = 0). Para ver si este vértice es óptimo, debemos calcular los Zj- Cj. Mientras alguno de éstos sea negativo significa que la variable correspondiente puede ingresar a la base y hacer aumentar el valor del funcional.

Una tabla de Simplex de maximización es óptima cuando todos sus Zj- Cj son positivos o cero. Análogamente, una tabla de Simplex de minimización es óptima cuando todos sus Zj-Cj son negativos o cero.

Una vez determinada la variable que entrará a la base (la que tenga el Zj-Cj negativo de mayor valor absoluto), se calculan los θ, para ver cual es la variable que saldrá de la base:
En este caso vemos que uno de los elementos de la columna de la variable que quiere entrar a la base da cero; con lo cual no se puede realizar la división. Este cero en el denominador indica que se podría aumentar X1 hasta el infinito y X2 nunca tomará valor cero. Si nunca toma valor cero, quiere decir que nunca se llegará a la intersección con dicha recta, o sea que no existe el vértice de intersección de ambas rectas (X4=0 y X2=0). Si no hay vértice, no nos interesa analizar dicha variable, en esta tabla. En este caso, como valor de Tita (θ), se indica infinito(∞).
Entonces, en el próximo paso X1 entrará a la base (es el que tiene el Zj-Cj negativo de mayor valor absoluto), y X3 saldrá de la misma (Es el que tiene el menor Tita). El pivote será el elemento ubicado en la intersección de ambas variables (o sea 2). La siguientes tablas indican el procedimiento:

C	X	B	8 x1	10 x2	0 x3	0 x4	0 x5	Ø
0	x3	150	$\boxed{2}$	0	1	-3/4	0	150/2 entra x1 y sale x3
10	x2	150	0	1	0	1/4	0	(∞).
0	x5	350	2	0	0	1/4	1	350/2
	Zj	1500	0	10	0	10/4	0	
	Zj- Cj		-8	0	0	10/4	0	

			8	10	0	0	0	
C	X	B	x1	x2	x3	x4	x5	Ø
8	x1	75	1	0	1/2	-3/8	0	75/(-3/8) negativo se descarta
10	x2	150	0	1	0	1/4	0	150/(1/4) = 600
0	x5	200	0	0	-1	$\boxed{1/2}$	1	200/(1/2) =400 menor Ø positivo
								entra x4 sale x5
	Zj	2100	8	10	4	-1/2	0	
	Zj- Cj		0	0	4	-1/2	0	

En este caso, uno de los posibles denominadores es negativo. Tampoco debe tenerse en cuenta esta variable, ya que nos está indicando que para que X1 llegue a cero, entonces X4 debe disminuir su valor. Pero como X4 vale cero, no puede disminuir más su valor, ya que un valor negativo es inconcebible. Sólo se deben calcular entonces, los titas cuyo denominador sea positivo. (El numerador siempre lo será, ya que un Bk nunca puede ser negativo.) En el caso de que el Bk fuera cero (lo cual es válido); si el denominador es positivo, se efectúa la división (Tita = 0). Si el denominador es negativo, entonces no se calcula este tita. Procedemos a iterar a la siguiente tabla (en donde entrará X4 y saldrá X5).

			8	10	0	0	0
C	X	B	x1	x2	x3	x4	x5
8	x1	225	1	0	-1/4	0	3/4
10	x2	50	0	1	1/2	0	-1/2
0	x4	400	0	0	-2	1	2
	Zj	2300	8	10	3	0	1
	Zj- Cj		0	0	3	0	1

Aquí, todos los Zj-Cj de las variables que no están en la base son positivos; o sea que cualquier variable que ingrese a la base hará disminuir al funcional. Por lo tanto, hemos hallado el punto óptimo. En este punto, se fabrican 225 manteles redondos y 50 manteles rectangulares, con una ganancia de $2300. La tela y las horas de trabajo se consumen en su totalidad y sobran 400 esquineros.